

### BADANIE ZGINANIA PROSTEGO I WYZNACZANIE MODUŁU YOUNGA

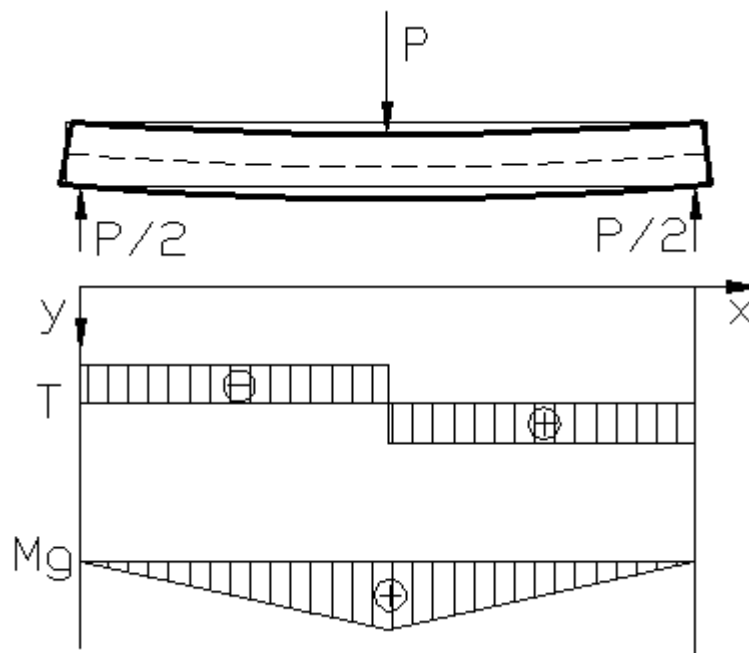
#### 2.1 Wstęp

Cele ćwiczenia:

- pokazanie doświadczalnego sposobu określenia modułu Younga;
- praktyczne zastosowanie wyprowadzonych teoretycznie wzorów do obliczenia wartości ugięcia belki pod działaniem momentu zginającego oraz do wyznaczenia modułu Younga;
- zapoznanie się z aparaturą stosowaną do prób zginania prostego (wykorzystanie uniwersalnej maszyny wytrzymałościowej)

#### 2.2 Wprowadzenie teoretyczne

Zginanie jest to stan obciążenia materiału w którym na materiał działa moment gnący, pochodzący od pary sił działających w płaszczyźnie przekroju wzdłużnego materiału. Zginanie proste oznacza że kierunek wektora momentu zginającego pokrywa się z kierunkiem osi symetrii przekroju poprzecznego zginanego materiału. W praktyce zginanie występuje w elementach konstrukcji, którymi najczęściej są belki. Rozważmy przykład belki przedstawionej na rys.2.1, obciążonej symetrycznie siłą  $P$ .

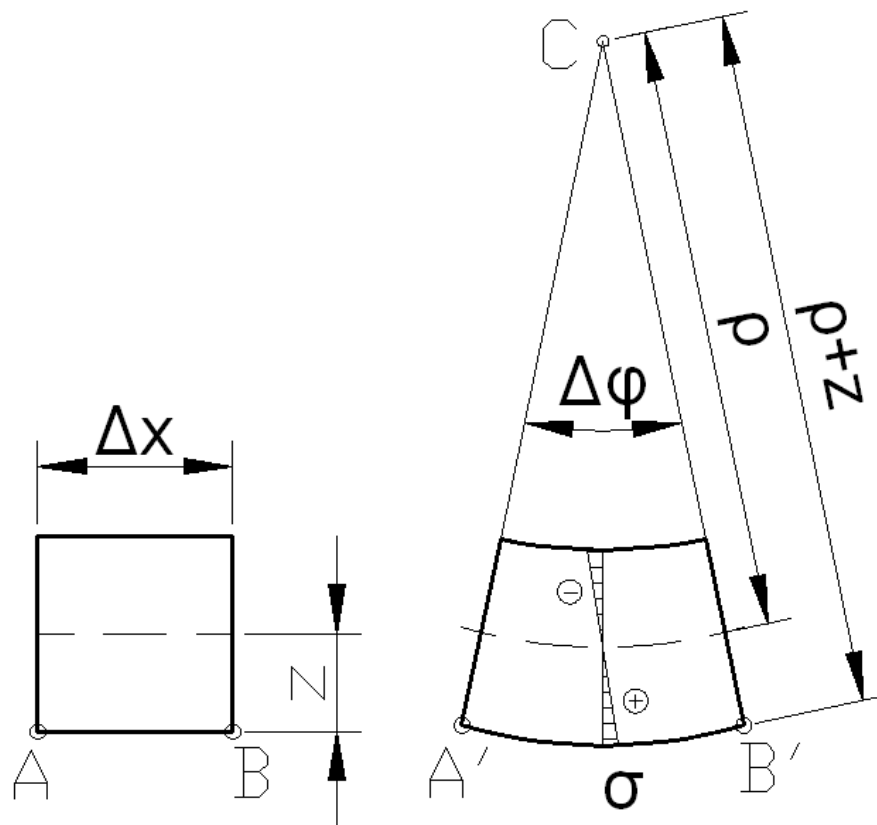


Rys. 2.1 Wykres sił tnących i momentów gnących dla rozpatrywanej belki

Efektom działania momentu gnącego jest wygięcie belki. Początkowo prostoliniowa oś belki zmienia się na krzywoliniową, krzywa ta nazywa się linią ugięcia osi belki. Wyniki eksperymentów pozwalają stwierdzić, że przekrój płaski i prostopadły do osi belki przed odkształceniem, pozostaje nadal płaski i prostopadły do ugiętej osi belki po odkształceniu.

Stwierdzenie to jest treścią tzw. hipotezy płaskich przekrojów postawionej po raz pierwszy przez Bernoulliego w 1694 roku.

Pod wpływem momentu zginającego część włókien belki jest ściskana, a pozostała część rozciągana. Włókna ściskane ulegają skróceniu, a rozciągane wydłużeniu. Granicę obu części belki stanowi pewna powierzchnia utworzona z tzw. włókien obojętnych, których odkształcenia (wydłużenia lub skrócenia względne) są równe zero.



Rys. 2.2 Element belki poddanej zginaniu

Wydłużenie względne zewnętrznej, rozciąganej warstwy belki wynosi:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \lim_{A \rightarrow B} \frac{A'B' - AB}{AB} \\ \varepsilon_x &= \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{(\rho + z)\Delta\varphi - \rho\Delta\varphi}{\rho\Delta\varphi} = \frac{z}{\rho}\end{aligned}\quad (2.1)$$

Wykorzystując prawo Hooke'a otrzymujemy:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{M}{EI} z \quad (2.2)$$

gdzie: M – moment gnący, I – moment bezwładności przekroju względem linii neutralnej.

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = \frac{a \cdot h^3}{12} \quad (2.3)$$

gdzie a – szerokość przekroju poprzecznego, h – wysokość (w kierunku strzałki ugięcia)

Krzywizna ugiętej belki określona jest równaniem którego przybliżona postać jest następująca:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (2.4)$$

gdzie

$$\frac{1}{\rho} \cong \frac{d^2 y}{dx^2}$$

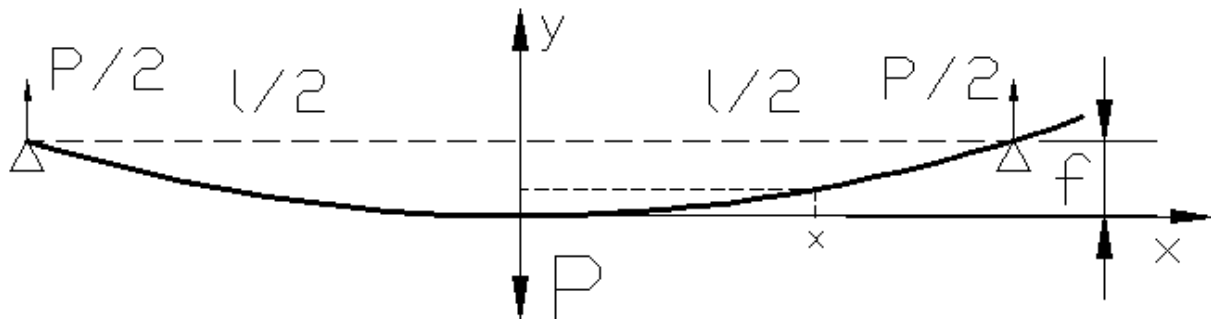
więc

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M \quad (2.5)$$

Rozpatrzmy ugięcie belki o długości  $l$  podpartej na obu końcach i obciążonej po środku siłą  $P$ . Każda z podpór działa na belkę siłą reakcji  $P/2$ . Ugięcie belki rozpatrujemy względem układu współrzędnych którego środek znajduje się w środku belki (rys.2.3). Moment siły reakcji działającej na koniec belki, liczony względem punktu leżącego w odległości  $x$  od środka belki wynosi:

$$M = \frac{P}{2} \left( \frac{l}{2} - x \right) \quad (2.6)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{2EI} \left( \frac{l}{2} - x \right)$$



Rys. 2.3. Strzałka ugięcia  $f$  belki

Otrzymujemy równanie różniczkowe drugiego rzędu, którego rozwiązanie  $y = f(x)$  określa linię ugięcia belki. Rozwiązanie powyższego równania otrzymamy przez dwukrotne całkowanie z uwzględnieniem warunków brzegowych.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{2EI} \left( \frac{l}{2} x - \frac{1}{2} x^2 \right) + C_1 \quad (2.7)$$

Stałą całkowania otrzymujemy z warunku  $dy/dx = 0$  dla  $x = 0$  (styczna do belki w tym punkcie jest pozioma), wynika stąd, że  $C_1 = 0$ .

W wyniku drugiego całkowania otrzymujemy:

$$y = \frac{P}{2EI} \left( \frac{l}{2} \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{3} x^3 \right) + C_2 \quad (2.8)$$

ponieważ dla  $x = 0$  również  $y = 0$  więc stała  $C_2 = 0$ . Podstawiając  $x = l/2$  oraz  $y = f$  otrzymujemy:

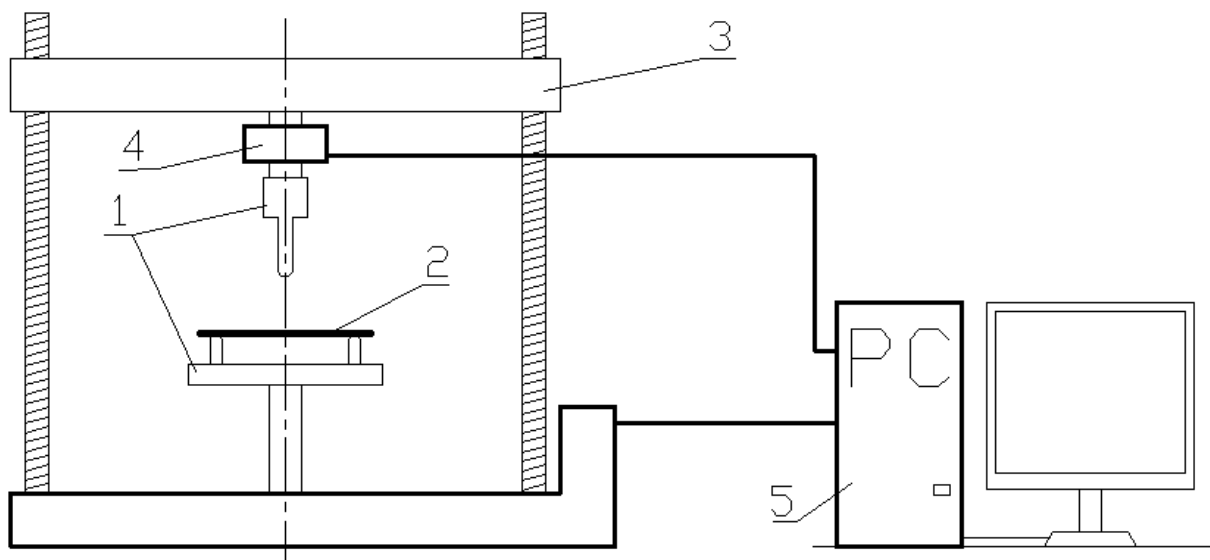
$$y_{\max} = f = \frac{Pl^3}{48EI} \quad (2.9)$$

f- strzałka ugięcia, największa wartość ugięcia (przeszyczenia pionowego) belki.

### 2.3 Opis stanowiska pomiarowego

Schemat stanowiska pomiarowego przedstawiono na rys. . W skład stanowiska wchodzi:

- stół i głowica do próby zginania 1,
- próbka 2,
- układ realizujący obciążenie 3,
- czujnik siły 4,
- jednostka sterująca i rejestrator 5.



Rys. 2.4 Schemat układu pomiarowego

Do pomiarów wykorzystano uniwersalną maszynę wytrzymałościową z oprzyrządowaniem przeznaczonym do próby zginania trzypunktowego.



Rys. 2.5 Stolik i głowica pomiarowa

## 2.4 Przebieg ćwiczenia

Ćwiczenie obejmuje:

- Pomiar strzałki ugięcia dla kilku obciążeń belki
- Pomiar odległości między środkami podpór oraz szerokości i wysokości belki w kilku miejscach

Wymagania techniczne i bezpieczeństwa:

- W czasie działania maszyny wytrzymałościowej należy unikać bezpośredniego kontaktu ze strefą w której znajduje się badana próbka

Sprawozdanie obejmuje:

- 1) Protokół pomiarowy
- 2) Krótkie przedstawienie celu i zakresu ćwiczenia
- 3) Sporządzenie wykresu strzałki ugięcia w funkcji obciążenia
- 3) Obliczenie maksymalnych wartości naprężeń normalnych w belce dla każdego obciążenia oraz przedstawienie ich na wykresie
- 4) Obliczenie wartości modułu Younga na podstawie przeprowadzonych pomiarów korzystając z przekształcenia wzoru (2.9)
- 5) Porównanie pomierzonych wartości strzałki ugięcia z wartościami obliczonymi
- 6) Wnioski

**Protokół pomiarowy**  
Laboratorium Mechaniki Technicznej

ĆW.2. BADANIE ZGINANIA PROSTEGO I WYZNACZANIE MODUŁU YOUNGA

Nazwisko i Imię	Grupa	Zespół	Data/Godzina ćwiczenia
	<i>Podpis prowadzącego ćwiczenie</i>		

Siła nacisku [N]	Strzałka ugięcia [m]	
		Rodzaj belki: .....
		Rozstaw podpór [m] .....
		Wymiary belki [m]:
		długość.....
		szerokość.....
		wysokość.....

Siła nacisku [N]	Strzałka ugięcia [m]	
		Rodzaj belki: .....
		Rozstaw podpór [m] .....
		Wymiary belki [m]:
		długość.....
		szerokość.....
		wysokość.....